

7. Un dels problemes a resoldre fou el de l'**escala** de l'edifici (grandària relativa) que Galileu Galilei havia esbossat en enunciar el seu *Dialogi de Dues Nove Scienze*. Entre elles, l'inici de la **Resistència de materials**. Hi incloc una explicació senzilla que permet esbrinar-ho, amb foto inclosa. Un prisma A assentat sobre un terreny genera tres vegades menys pressió sobre el terreny que un de 3 vegades més gran B amb la mateixa forma. Això, que és obvi, tampoc no és lineal. I aquí rau la dificultat que intuïen Bramante, Miquelàngel, etc..... fins els gratacels d'avui en dia.

L'escala dels edificis. Tot treballant amb escales (grandàries relatives)

Un paral·lelepípede tres vegades major en escala ocupa una base de 9 vegades major àrea i embolcalla un volum (proporcional a l'àrea de la base per l'altura) 27 vegades major al que embolcalla el de menor escala. Partint de la pressió (força a compressió) a la què està sotmesa la base i dividint el pes total de l'estructura per l'àrea de la seua base, i si ambdues estigueren fetes del mateix material (o materials de la mateixa densitat), l'estructura major experimentaria el triple de força de compressió, sobre el terreny, que l'experimentada per una estructura semblant d'escala 1/3 respecte a aquesta.

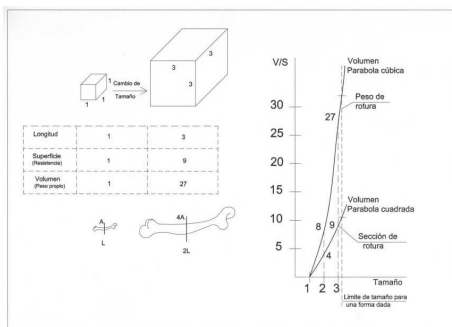


Foto d'esquema 22.

Galileu en el seu *Diàleg sobre Dues Noves Ciències* publicats en 1638 el plantejament de la dinàmica i de la resistència de materials. Malgrat que en la seua època la matemàtica no estava suficientment desenvolupada. Mancava el desenvolupament de la teoria del primer vector que no arribaria fins a Newton. L'anàlisi de la geometria de les formes arquitectòniques ha estat usat de manera habitual pels erudits per a explicar l'evolució dels estils, però cal recordar que l'aplicació aïllada de regles geomètriques simples mai podria tenir èxit estructural. Quadrats, arcs, triangles, etc. foren usats de manera conceptual, però les relacions serien variades sempre que fos convenient en pro de l'estabilitat estructural. Exemple, tot i que l'espai interior del Panteó de Roma estiga cobert amb una forma semiesfèrica primària, l'extradós de la cúpula presenta un perfil més aplanat, complex i camús. Més significatiu és encara que l'estudi de les formes geomètriques no tinguen en compte l'escala dels edificis. Galileu es sorprèn més encara que algun dels seus contemporanis reberen la nova ciència –la resistència de les estructures– sols en termes de geometria (a tall- i manera-, de com ho feien els constructors gòtics).

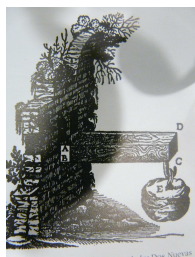
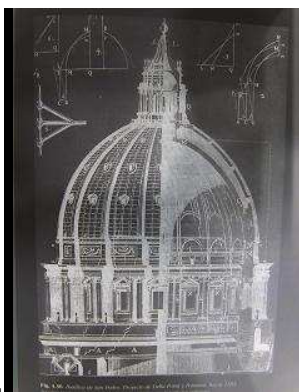


Foto 23. gravat de G. Galilei. Inici de la ciència de Resistència de Materials

Galileu esbossà la seua tesi de pensament que hom pot resumir breument en la idea de que la construcció a gran escala està exposada a majors pressions degut a que el seu volum, i per tant el seu pes mort, augmenta en una proporció del cub de l'escala constructiva, mentre que l'àrea de l'estructura portant de l'edifici sols augmenta en el quadrat de la seua escala.

D'ací que la geometria, tota sola no explicaria el bon comportament de l'estructura avançant-nos a deduir que qualsevol intent de generar forma arquitectònica sense atendre l'escala constructiva està condemnada al fracàs.

8. "**QUI FERRA, L'ERRA**" o "**ON HI HA FERRO, HI HA ERRO**" que deien les nostres dites ancestrals. Della Porta i Fontana van incloure-hi cadenes de ferro, ja, a finals del segle XVI per tal d'absorbir els esforços horitzontals des de "mitja taronja" fins a la base de la membrana sobre el tambor. De fet, pocs anys després d'acabar-la, ja, hi havia evidents esquerdes i badalls exagerats a la cúpula



vaticana. Foto 24.



Foto 25.

Gravat de l'esquema fissuratiu d'en G. Poleni definint les corretges metàl·liques que della Porta i Fontana hi havia inclòs en la construcció d'ela cúpula vaticana. Per tant els arquitectes constructors eren conscients de l'esberlament i agallonament de les cúpules, com es demostra en l'esquema-ideograma que afegim tot seguit.

9. G. Poleni fou un matemàtic venetià a qui li va ser encarregat un informe sobre les esquerdes de la cúpula de sant Pere. **Memorie della Gran Cupola del Tempio Vaticano. 1748.**

El model de Della Porta indica unes febles tensions de tracció excèntrica als ronyons de la cúpula.

Aquesta tracció fou considerada, anteriorment, per Porta i Fontana que col·locaren dues cadenes de ferro (que mesuraven de 6 a 8 centímetres quadrats de secció. al

voltant de la cúpula. Tanmateix i quasi finalitzades les obres començarien a aparèixer esquerdes en un dels arcs torals del creuer que tingueren que cosir amb grapes de ferro i tapar-se. En 1630, s'observà la propagació de més fissures dintre de la cúpula. Causant gran alarma. Ja en la primèria del segle XVIII el Papa temia la solside immediata i crida G. Poleni, un matemàtic venecià, per a la cerca d'una solució. Aquest féu un detall estudi de camp i tècnic i determinà que calien cinc cadenes de ferro addicionals, de major resistència que les originals que corregirien el problema. Durant la seua col·locació, Poleni descobrí que les originals hi havien trencat en rovellar-se. Les reparà també. Amb el reforç d'en Poleni, la cúpula ha romàs estable des del segle XVIII. Els contraforts del tambor i el corredor inferior han requerit un continu entreteniment, tot i que la pròpia cúpula no haja experimentat un moviment excessiu. Sols una prima esquerda vertical en el sector que guaita vers la Capella Sixtina és avui prou visible. En aquestes **Memorie** donà la solució de que eren normals i no feien córrer cap perill immediat de solside – segons la geometria i estructura de la membrana- i tragué importància de llur existència. Amb el seu estudi fou intervinguda la cúpula. Extrem aquest, en que l'escrit -diu que no fou així. Poleni sí que va donar les instruccions per a adobar els esquerdaments de la cúpula vaticana. En fixarien corretges de secció de 6 a 8 cm. quadrats (6-8 cm²) i adobaren i reconstruirien les dues antigues que s'havien rovellat pel pas del temps i la desprotecció ambiental hi afegides a l'obra de fàbrica per della Porta i Fontana. Sembla que Poleni, no fou entès, doncs no deixarien que l'escomesa fóra portada a cap per ell, sinó, per d'altres constructors.

10. L'existència d'òscul i/o llanternó és indiferent en la coronació a efectes dels polígons funicular i vectorial. De fet, els afegits al trasdòs al Panteó naix, precisament, perquè hi havien badalls. Contràriament al que defensa l'autor de l'article.

L'informe de Poleni de 1748 (*Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano*). Pàdua. En que se li encarregà donar raó de l'estat d'esquerdament de la cúpula de St. Pere, a Roma (projectada per Miquelàngel en 1546, construïda després de la seua mort per Fontana i della Porta pels environs de 1574. La cúpula mostrava nombrosos esquerdaments meridionals, que anaven des de la base fins quasi a coronació, i les preguntes que calia respondre, aleshores i ara, eren:

¿Quin és el significat d'aquests esquerdaments?, ¿En són perillosos ?

Poleni proporciona una ressenya completa de l'estat dels coneixements de la construcció de fàbriques a mitjan del segle XVIII. Com hem insinuat, Poleni coneixia la catenària de Hooke i demostra una sorprenent pre-percepció del teorema de la seguretat en la seua afirmació explícita de que l'estabilitat de l'estructura està assegurada si hom pot demostrar que una línia d'empentes es troba dins de la fàbrica.

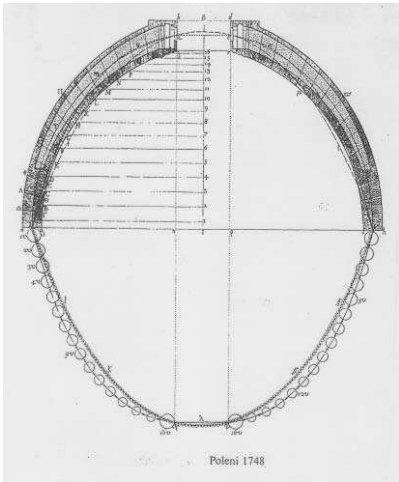


Foto 26. Poleni. Superposició de la catenària de Hooke al perfil "carregat" de st. Pere.

Poleni observà que les línies d'esquerdament de St. Pere havien ja dividit en gallons la cúpula amb forma de semifusos esfèrics. Amb fi i efecte d'analitzar-la, l'en dividí analíticament i hipotèticament en 50 semifusos. Prengué dos semifusos oposats que es recolzaven mútuament en la coronació, per tal de comprovar llur estabilitat. Dibuixà un d'ells a escala, a partir de la secció transversal de la cúpula. Calculà el pes d'un semigalló, en dividir-lo en 16 segments i tenint en compte el pes de la llanterna. Penjà 32 fils amb saquets de sorra i pesos proporcionals a cadascun dels segments, d'aquesta manera pràctica i experimental trobà "**la forma de la cadena penjant**" d'en Hooke, aplicada al cas concret. Després la dibuixà i superposà a l'alçament de la cúpula. La conclusió, correcta, fou que la cúpula, malgrat estar esquerdada, clivellada, badada, etc. Era estable. Hi havia "dibuixat", com faria dos segles i mig després Gaudí, el **funicular de càrregues**.

Per tant, Poleni, hi havia trobat una solució per a la cúpula en la què la tensió anular era zero. Per semigallons oposats. Hom pot considerar-ne de la mateixa manera quasi-bidimensional, tot podent-s'hi calcular la gruixa mínima de la membrana de la cúpula.

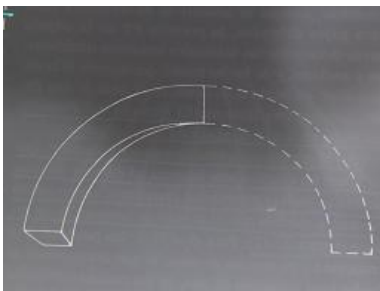


Foto 27. Semigalló

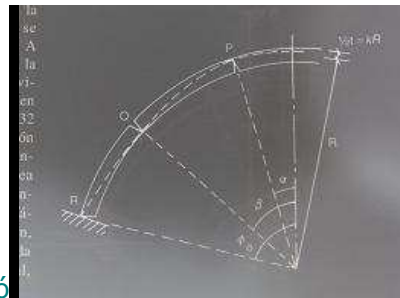


Foto 28.

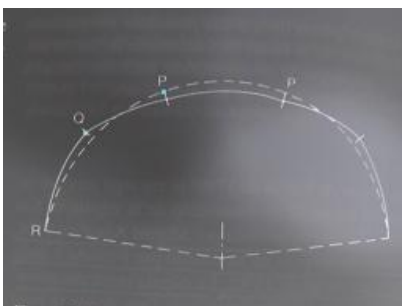


Foto 29. Estat de Col·lapse, amb quatre ròtules.

El corresponent estat de col·lapse per a la cúpula complerta correspon a la següent figura i es veurà que la porció PP prop de la coronació de la cúpula segueix sent coherent, mentre que les articulacions en P, Q i R asseguren que la cúpula s'ha dividit a si mateixa en fusos, a tall que no poden produir tensions anulars. Per contra, tot i que l'anàlisi que portà cap a gallons primos, la porció PP de la cúpula pot desenrotllar les habituals tensions meridionals i anulars, de fet, hi haurà de fer-ho si la cúpula té un òcul, o si en té una llanterna, com passa a St. Pere.

Per a una cúpula complerta d'espessor constant, que no tinga ni llanterna ni òcul, la gruixa mínima necessària per a l'estabilitat minva, com era d'esperar, a mesura que l'angle d'obertura β_0 es redueix. Per a $\beta_0 = 51'8^\circ$, els punts P i Q coincideixen i la gruixa és zero, el que correspon al fet conegut de que, les closques o membranes primes de revolució tant les tensions meridionals com les anulars són de compressió en la coronació, com també ho són els angles bastant separats de la coronació. La taula següent mostra els espessors mínims per a l'estabilitat en funció de l'angle d'obertura per arcs i cúpules, d'acord a la relació percentual entre gruixa i radi de corbatura. Per a angles β_0 menors de $51'8^\circ$ una cúpula esfèrica de fàbrica hom podria construir, en teoria, amb una gruixa infinitament petita. Una cúpula semiesfèrica ha de tindre una gruixa mínima de poc més d'un 2% del diàmetre. Les cúpules reals tenen una gruixa molt major que el mínim, i endemés, moltes ni s'aproximen a la forma semiesfèrica. La de St. Pere té una relació (k) propera al 5 % del diàmetre. La del Panteó un 3'3 % aproximadament. Com s'esdevé sovint, també en les de creuria gòtica, es suposarà que la cúpula cedirà lleugerament degut a les espentes originades per la pròpia cúpula. El desajustament geomètric, és absorbit i compensat, mitjançant l'aparició d'esquerdes.

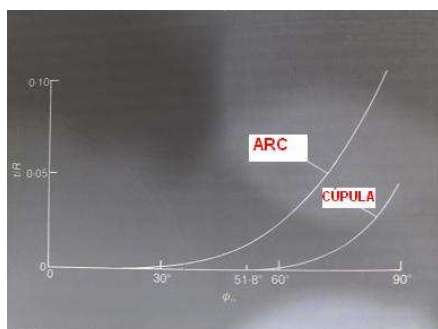


Foto 30.

En la figura que dibuixem representem un esquema de configuració d'esquerdes per a una cúpula complerta. Els badalls meridionals naixen des de la base i pugen vers la clau, però hi ha un casquet central sens esquerdar. Per dessota d'aquest nivell, el moviment de l'estructura de recolzament ens assegura la formació de semifusos o semigallons en el què hom pot basar l'anàlisi.

La figura següent mostra una secció transversal parcial. Si la comparem amb una d'espessors mínims es pot percebre que l'articulació en Q es manifesta en la base. És possible escriure una equació intrínsec directa, si bé, d'una certa complexitat, a partir de la qual hom pot determinar l'angle α (que separa el casquet sòlid de la cúpula dels gallons esquerdat) en funció de l'angle d'obertura β i de l'espessor $t = 2kR$; on R és el radi de cúpula. Per a angles d'obertura β majors a 65° , depèn lleugerament de l'espessor de la fulla, t; la línia d'espentes és tangent a l'intradòs en Q, i l'articulació no es forma a la base del fus.

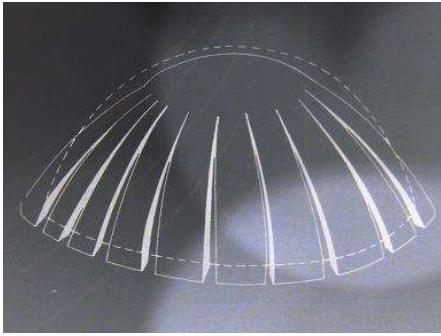


Foto 31.

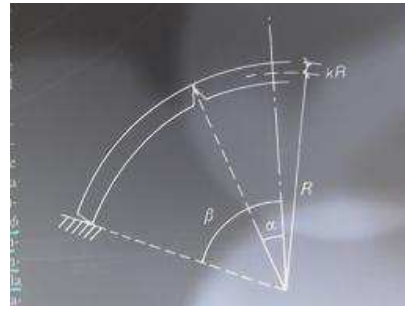
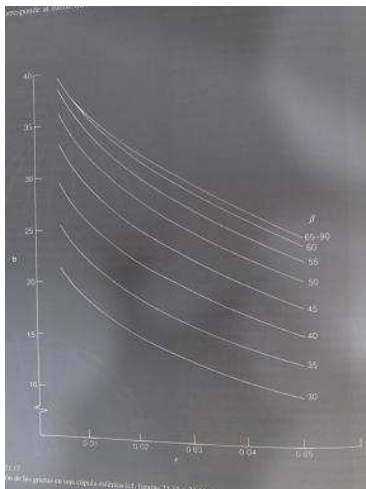


Foto 32.

En St. Pere on l'angle $\beta_0 = 90^\circ$ i $K = 0,05$ aproximadament, la corba dóna $\alpha = 24^\circ$; les inquietants esquerdes meridionals que conduïren l'informe d'en Poleni hi haurien d'ascendir fins a 66° des de la base; cosa que concorda perfectament amb l'esquema de fissuració que en realitzà.

La gràfica següent s'ha realitzat per a calcular el comportament d'una cúpula esfèrica d'espessor constant, i que ni tan sols s'aproxima a la cúpula de St. Pere. Tanmateix, els resultats semblen aplicables, i que una anàlisi del Panteó reforça. El Panteó és una estructura romana de formigó que ja hem mostrat en les anteriors seccions transversal gràfica.



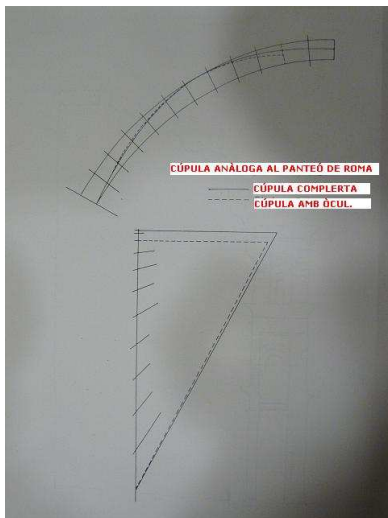
Gràfica de l'extensió dels badalls d'una cúpula esfèrica.

La cúpula té un òcul de 9'00 m. de diàmetre i hom pot modelitzar com a una cúpula esfèrica amb un radi de 22'40 m. i una gruixa de fulla d'un metre i mig (1'50 m.). Amb tot, el valor de $t = 2kR$; i d'ací que $k = 0'033$. ($t = 150 \text{ cm} / R = 2240 \text{ cm}$) i si la cúpula fóra realment semiesfèrica l'angle $\sim 28^\circ$.

Aquest valor de 28° concorda amb el valor aproximat de 26° que hom troba gràficament construint el polígon funicular de càrregues. La següent figura mostra la línia d'empentes (amb línia contínua) dibuixada fins a uns 60° des de la coronació; l'angle d'obertura de 60° correspon al fort augment de l'espessor en la unió de la cúpula amb el tambor circular que la suporta.

La figura següent mostra una altra línia d'empentes (discontínua) per a la cúpula amb òcul central. L'extensió dels badalls ($\alpha = 26^\circ$) roman gairebé igual d'invariable que quan A. Terenzio féu un informe (*La Restauration du Panthéon de Rome*) en 1934, fa vora 175 anys. Com assenyalen Mark i Hutchinson (*On the structure of the Roman Pantheon*.1986) asseguren que les esquerdes en la direcció meridional arriben fins a una mitjana de 57° per damunt de l'arranc (és a dir $\alpha = 23^\circ$).

Comptat i debatut, tant l'estudi de la cúpula complerta sens òcul com els estudis i càlculs recollits en aquest prediuen amb exactitud l'extensió dels badalls de la cúpula real. Les línies d'espenta de la següent figura corresponen als esforços en els fusos definits per l'extensió dels badalls, és a dir, per a angles entre 26° i el d'obertura de 60° . Per a angles menors de la línia d'espenta de la cúpula sencera representa una possibilitat d'equilibri, però, com s'ha assenyalat, el casquet de la cúpula roman en un estat coherent, sens badallament. La línia d'espentes de traces per a la cúpula amb òcul no té sentit per a la porció de casquet que té angles meridionals menors de 26° . Les tensions meridionals han de tendir a zero en la vora de l'òcul, i el casquet central sols es pot mantenir en equilibri si s'originen tensions anulars de compressió. Nogensmenys, aquest equilibri de membrana és possible realment per al casquet; la línia d'espentes de traces de la figura és vàlida davall del casquet per al galló produït per l'esquerdament.



11. Des dels primers plantejaments de Galilei, passant per Hooke, Newton, fins als nostres dies en que es planteja una doble alternativa: d'un costat l'ús dels ordinadors per al càlcul mitjançant el mètode d'elements finits, basat en la resistència de materials i el tram de base elàstica, fins a la translació del càlcul plàstic d'estructures d'acer a estructures de fàbrica de pedra, maó, etc. en base a les tres equacions d'equilibri i el teorema de seguretat, dins del tram plàstic en càrrega de col·lapse, hi ha un llarg camí. I no per això no acoblarem a cada cas aquell que més ens interesse, en funció de les circumstàncies. Ni bons ni dolents. El cas per cas. Però dialècticament i crítica. El món és tan complex que els plantejaments binari, de la mena que siguen, són certament empobridors.